DS n°4 : intégrales, ED, suites

Durée : 4 heures. Calculatrices non autorisées.
Les exercices sont indépendants et peuvent être traités dans l'ordre souhaité.
Toute affirmation non triviale doit être justifiée.

Exercice 1

Les questions de cet exercice sont indépendantes.

1) Calculer $I = \displaystyle\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}} \frac{dt}{\sin t}$. On pourra poser $u = \cos t$.

2) Montrer que pour tout $x \in [-1, 1]$, $\arccos x + \arcsin x = \dfrac{\pi}{2}$. En déduire $\displaystyle\int_{-1}^{1} \left(\frac{\pi}{2} - \arccos x\right) dx$.

3) On pose $f : x \mapsto \dfrac{x}{(x^2-1)^2}$. On admettra qu'il existe des réels a, b, c, d tels que $f(x)$ peut s'écrire sous la forme

$$f(x) = \frac{a}{x-1} + \frac{b}{(x-1)^2} + \frac{c}{x+1} + \frac{d}{(x+1)^2}$$

Déterminer ces réels et en déduire une primitive de f sur $]1, +\infty[$.

Exercice 2

On considère l'équation différentielle d'inconnue y :

$$(E) : \quad xy' = x + y$$

1) Résoudre (E) sur $I_1 = \mathbb{R}_-^*$ et $I_2 = \mathbb{R}_+^*$.

On cherche à résoudre (E) sur $\mathbb{R}$ en procédant par analyse-synthèse. Soit donc $y : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une solution de (E). En particulier, $y|_{\mathbb{R}_-^*}$ est solution de (E) sur I_1 et $y|_{\mathbb{R}_+^*}$ est solution de (E) sur I_2.

2) Montrer que $y(0) = 0$.

3) Déterminer $\lim\limits_{x \to 0^+} y(x)$ et $\lim\limits_{x \to 0^-} y(x)$.

4) Montrer que y est continue.

5) Est-ce que y est dérivable ?

6) Conclure.

Exercice 3

Résoudre les équations différentielles suivantes :

1) $y' + y = \dfrac{1}{1+e^t}$

2) $\begin{cases} y'' - 2y' + y = t \\ y(0) = 0 \\ y'(0) = 0 \end{cases}$

3) $y'' - 2y' + y = \sin^2 t$

Exercice 4

On considère une suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à termes positifs telle que

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad a_{n+2} \leq \frac{2a_{n+1}+3a_n}{8}$$

On veut montrer que cette suite tend vers 0.

1) Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = a_0$, $u_1 = a_1$ et $\quad \forall n \in \mathbb{N} \quad u_{n+2} = \dfrac{2u_{n+1}+3u_n}{8}$.
Exprimer le terme général u_n en fonction de a_0, a_1.

2) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

3) Montrer que : $\quad \forall n \in \mathbb{N} \qquad 0 \leq a_n \leq u_n$.

4) Conclure.

Exercice 5

Soit a un réel strictement positif. On considère la suite (x_n) définie par $x_0 = a$ et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N} \qquad x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{a}{x_n}\right)$$

1) Donner le tableau de variations sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{2}\left(x + \dfrac{a}{x}\right)$.

2) Démontrer que : $\quad \forall n \in \mathbb{N}^* \quad x_n \geq \sqrt{a}$.

3) Montrer que : $\quad \forall n \in \mathbb{N} \quad x_{n+1} - x_n = \dfrac{1}{2x_n}\left(a - x_n^2\right)$.

4) En déduire que (x_n) converge vers $\sqrt{a}$.

Exercice 6 (pour les plus audacieux...)

Soit $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $c_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_{n+1} = \sqrt{\dfrac{1+c_n}{2}}$.

1) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $c_n = \cos\left(\dfrac{\pi}{2^{n+1}}\right)$.

On considère les suites $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par les relations suivantes, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$S_0 = 2 \qquad S_n = \frac{S_{n-1}}{c_n} \qquad \text{et} \qquad T_n = \frac{S_n}{c_n}$$

2) Montrer que (S_n) et (T_n) sont adjacentes. Que peut-on en déduire ?

3) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $S_n = 2^{n+1}\sin\left(\dfrac{\pi}{2^{n+1}}\right)$.

4) En utilisant le fait que $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, en déduire la limite de (S_n).